第43卷　第1期　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　Vol.43,No.1
2024年3月　Journal of Xinjiang Normal University　Mar. 2024
(Natural Sciences Edition)

*Riesz*模范畴的完备性和余完备性

李丹阳[1],汤建钢[1,2]
(1.伊犁师范大学 数学与统计学院,新疆 伊宁 835000;2.伊犁师范大学 应用数学研究所,新疆 伊宁 835000)

摘　要: 范畴论是现代数学的基础,从*Riesz*模范畴出发,研究*Riesz*模的内部特征是研究*Riesz*模的重要方法。范畴的极限是范畴论的重要概念之一,范畴中乘积、等值子概念均可以看作是范畴的某种特殊的极限,余积、余等值子是特殊的余极限。范畴中极限的存在性决定了该范畴的完备性,余极限的存在性决定了余完备性。通过对以*Riesz*模为对象,*Riesz*模同态为态射的*Riesz*模范畴极限的研究,给出了*Riesz*模范畴中的乘积与余积、等值子与余等值子的具体表示形式,进而证明了*Riesz*模范畴具有完备性和余完备性。

关键词: *Riesz*模;范畴;等值子;余等值子;完备性;余完备性

中图分类号: O153.1;O153.3　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1008-9659(2024)01-0013-09

自Birkhoff提出格序群[1]概念以来,序代数理论得到迅猛发展,Birkhoff等人研究了格序群的一般结构和分解理论,并将格序结构引入到环上,提出了格序环的相关概念[2]。Riesz将格序结构引入到向量空间,形成了*Riesz*空间的一些基础理论[3]。模作为域上线性空间概念的推广,已经成为当代重要的代数结构之一。崔晓宇等人在戴天佑研究的基础上将*Riesz*空间推广到左R-模上,定义了*Riesz*模的概念,讨论了左R-模上*Riesz*空间的相关性质,为左R-模上*Riesz*空间理论的研究奠定了基础[4-5]。孙锐娟等人在格序群、格序环以及格序结构*Riesz*空间概念的基础上,研究了左R-模上*Riesz*空间的同态与同构的相关性质[6]。刘晓芳等人在*Riesz*模范畴概念的基础上,研究了*Riesz*模簇的直积与直和,并对其相关性质进行了证明[7]。

范畴论是以抽象的方式处理数学结构并研究不同结构之间的联系而成为一个重要的现代数学基础理论。范畴的完备性和余完备性是两个重要的性质,张娟娟等人证明了Ω-左R-模范畴是完备的[10],耿俊等人证明了$\Omega-Cat$范畴是完备的[11],徐晓泉证明了完全分配格范畴具有完备性和余完备性[13]。基于以上研究背景,文章讨论了*Riesz*模范畴中的乘积和余积、等值子和余等值子,进而证明了*Riesz*模范畴具有完备性和余完备性。

1　预备知识

定义1[9]　设L为一个偏序集,如果对任意的$a,b\in L$,$\sup\{a,b\}$与$\inf\{a,b\}$均存在且都在L中,则称偏序集L是一个格,分别用$a\vee b$与$a\wedge b$表示$\sup\{a,b\}$与$\inf\{a,b\}$,并且用四元序$(L,\leqslant,\vee,\wedge)$表示格,简记为$(L,\leqslant)$.

定义2[5]　设$(G,+)$是一个*Abel*群,如果$(G,+,\leqslant)$是一个格,且满足相容性条件,即对任意的$a,b,c\in G$,$a\leqslant b\Rightarrow a+c\leqslant b+c$,则称$(G,+,\leqslant)$是一个*Abel*格序群,简称*Abel l*-群。

定义3[5]　设$(R,+,\cdot)$是一个具有单位元的环,如果$(R,+,\cdot,\leqslant)$是一个格,且满足下列相容性条件,即对任意的$r,s,t\in R$:

(1)$r\leqslant s\Rightarrow t+r\leqslant t+s$;

[收稿日期]2023-07-03　　[修回日期]2023-08-18
[基金项目]伊犁师范大学提升学科综合实力专项项目(22XKZZ20)。
[作者简介]李丹阳(1999-),女,河南滑县人,硕士研究生,主要从事范畴论及其应用方面研究。

(2)$0 \leqslant r, 0 \leqslant s \Rightarrow 0 \leqslant rs$;
则称$(R, +, \cdot, \leqslant)$是一个格序环,简称l-环。

定义4[6] 设M是左R-模,如果$(R, +, \cdot, \leqslant)$是具有单位元的l-环,$(M, +, \leqslant)$是$Abel$ l-群,且满足下列相容性条件,即对任意的$m, n, p \in M$,$r \in R$:

(1)$m \leqslant n \Rightarrow p + m \leqslant p + n$;

(2)$0 \leqslant r, 0 \leqslant m \Rightarrow 0 \leqslant rm$;
则称$(M, +, \leqslant)$是一个格序左R-模,简称$Riesz$模。

定义5[6] 设$(M, +, \leqslant)$是$Riesz$模,N是M的子集,并且$(N, +)$是$(M, +)$的子模,$(N, \leqslant)$是$(M, \leqslant)$的子格,并且$R^+N^+ \subseteq N^+$,则称$(N, +, \leqslant)$是$(M, +, \leqslant)$的一个子$Riesz$模。

定义6[7] 设M, M'都是左R-模,$f:M \to M'$是映射,若对任意的$r \in R$,$m,n \in M$有
$$f(m + n) = f(m) + f(n), f(rm) = rf(m)$$
成立,则称f是R模同态,简称R同态。

定义7[9] 设P、Q都是格,$f:P \to Q$是映射,若对任意的$x,y \in P$有
$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$
成立,则称f是格同态。

定义8[5] 设$(M, +, \leqslant)$、$(N, +, \leqslant)$均为$Riesz$模,$f:M \to N$是映射,若f既是R模同态,又是格同态,则称f是$Riesz$模同态,记作$f:(M, +, \leqslant) \to (N, +, \leqslant)$.

定义9[7] $Riesz$模构成的范畴Rie_R^l定义为:

(1)对象类$ob(Rie_R^l)$为全体$Riesz$模;

(2)对任意的$(M, +, \leqslant),(N, +, \leqslant) \in ob(Rie_R^l)$,$Hom((M, +, \leqslant),(N, +, \leqslant)) = \{ f | f:(M, +, \leqslant)$到$(N, +, \leqslant)$的一个$Riesz$模同态$\}$;

(3)若$(M, +, \leqslant),(N, +, \leqslant),(P, +, \leqslant) \in ob(Rie_R^l)$,$f \in Hom((M, +, \leqslant),(N, +, \leqslant))$,$g \in Hom((N, +, \leqslant),(P, +, \leqslant))$,态射的复合$gf \in Hom((M, +, \leqslant),(P, +, \leqslant))$为同态的复合;

(4)对任意的$(M, +, \leqslant) \in ob(Rie_R^l)$,单位态射为$1_M \in Hom((M, +, \leqslant),(M, +, \leqslant))$,并且对任意的$f \in Hom((M, +, \leqslant),(N, +, \leqslant))$,$g \in Hom((P, +, \leqslant),(M, +, \leqslant))$,有$f1_M = f$,$1_M g = g$.

定义10[14] 设C是一个范畴,$\{ M_i | i \in I \}$是C中的一簇对象,C中的对象M叫作$\{ M_i | i \in I \}$的乘积,如果:

(1)对任意的$i \in I$,存在态射$p_i:M \to M_i$;

(2)对任意对象$N \in C$,若存在态射$q_i:N \to M_i$,$i \in I$,则存在唯一的态射$\alpha:N \to M$使得图1可交换。

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "q_i"'] & M \arrow[d, "p_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

图1 乘积的定义示意图

定义11[14] 设C是一个范畴,$\{ M_i | i \in I \}$是C中的一簇对象,C中的对象L叫作$\{ M_i | i \in I \}$的余积,如果:

(1)对任意的$i \in I$,存在态射$q_i:M_i \to L$;

(2)对任意对象$N \in$ C,若存在态射$p_i:M_i \to N$,$i \in I$,则存在唯一的态射$\beta:L \to N$使得图2可交换。

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[d, "q_i"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\ L \arrow[r, "\beta"'] & N \end{tikzcd}$$

图2 余积的定义示意图

定理1 如果$(M, \{p_i\}_{i \in I})$和$(M', \{p_i'\}_{i \in I})$都是范畴C的对象簇$\{ M_i | i \in I \}$的乘积,则M和M'是同构的。

证明 由于M和M'都是范畴C中$\{ M_i | i \in I \}$的乘积,那么对任意的$i \in I$,存在态射$p_i:M \to M_i$及$p_i':M' \to M_i$,又因为M和M'都是乘积,所以存在态射$f:M' \to M$及$g:M \to M'$使得图3可交换,故对任意的$i \in I$

有$p_i'gf = p_i'$，由i的任意性可知$gf = 1_{M'}$，同理可知$fg = 1_M$，所以M和M'是同构的。

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_i"] & M' \arrow[dl, "p_i'"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

图3　乘积同构示意图

定理2　如果$(L,\{q_i\}_{i \in I})$和$(L',\{q_i'\}_{i \in I})$都是范畴C的对象簇$\{M_i|i \in I\}$的余积，则L和L'是同构的。

注：定理1和定理2说明范畴的乘积或者余积如果存在，则在同构意义下均是唯一的。

定义12[14]　设$f,g:M \to N$是一对平行态射，如果态射$e:E \to M$满足：

（1）$fe = ge$；

（2）对任意的态射$e':E' \to M$满足$fe' = ge'$，存在唯一的态射$h:E' \to E$使得$e' = eh$成立（图4），则称$e:E \to M$是$f,g:M \to N$的等值子。

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & N \\ E' \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

图4　等值子的定义示意图

定义13[14]　设$f,g:M \to N$是一对平行态射，如果态射$q:N \to L$满足：

（1）$qf = qg$；

（2）对任意的态射$q':N \to L'$满足$q'f = q'g$，存在唯一的态射$\pi:L \to L'$使得$q' = \pi q$成立（图5），则称$q:N \to L$是$f,g:M \to N$的余等值子。

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & L \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ & & L' \end{tikzcd}$$

图5　余等值子的定义示意图

引理1[14]　设C是一个任意范畴，则C是完备的当且仅当存在乘积和等值子。

引理2[14]　设C是一个任意范畴，则C是余完备的当且仅当存在余积和余等值子。

2　主要结果

下面讨论*Riesz*模范畴Rie_R^l中的乘积与余积。

引理3　设$\{(M_i, +, \leqslant)|i \in I\}$是范畴$Rie_R^l$中的一簇*Riesz*模，这里的指标集$I$是任意的，记$(M, +, \leqslant) = \Pi(M_i, +, \leqslant)$是*Riesz*模簇的笛卡尔积，其中$(M, +, \leqslant)$中的元素表示为$\{m_i|m_i \in M_i\}_{i \in I}$，在该集合中规定：对任意的$\{m_i\},\{m_i'\} \in (M, +, \leqslant)$，$r \in (R, +, \cdot, \leqslant)$有

$$\{m_i\} + \{m_i'\} = \{m_i + m_i'\}, r\{m_i\} = \{rm_i\}$$

$$\{m_i\} \wedge \{m_i'\} = \{m_i \wedge m_i'\}, \{m_i\} \vee \{m_i'\} = \{m_i \vee m_i'\}$$

则

（1）$(M, +, \leqslant)$是一个*Riesz*模；

（2）投影$p_j:(M, +, \leqslant) \to (M_j, +, \leqslant)$，$p_j(\{m_i\}) = m_j$是*Riesz*模满同态。

证明　（1）由模论可知，$(M, +, \leqslant)$是一个左R－模。又由于$\{m_i\} \wedge \{m_i'\} = \{m_i \wedge m_i'\}$以及$\{m_i\} \vee \{m_i'\} = \{m_i \vee m_i'\}$，故$(M, +, \leqslant)$可以构成一个格。并且对任意的$\{n_i\} \in (M, +, \leqslant)$，若$\{m_i\} \leqslant \{m_i'\}$，$r \geqslant 0$，那么有

$$\{m_i\} + \{n_i\} = \{m_i + n_i\} \leqslant \{m_i' + n_i\} = \{m_i'\} + \{n_i\}, r\{m_i\} \geqslant \{0\}$$

故相容关系成立，由此可得$(M, +, \leqslant)$是一个*Riesz*模。

(2)投影$p_j:(M,+,\leqslant)\to(M_j,+,\leqslant)$，$p_j(\{m_i\})=m_j$，显然$p_j$是满射，对任意的$\{m_i\},\{m_i'\}\in(M,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$有

$$p_j(\{m_i\}+\{m_i'\})=p_j(\{m_i+m_i'\})=m_j+m_j'=p_j(\{m_i\})+p_j(\{m_i'\})$$
$$p_j(\{rm_i\})=p_j(r\{m_i\})=r\{m_j\}=rp_j(\{m_i\})$$

成立，又由于

$$p_j(\{m_i\}\wedge\{m_i'\})=p_j(\{m_i\wedge m_i'\})=m_j\wedge m_j'=p_j(\{m_i\})\wedge p_i(\{m_i'\})$$
$$p_j(\{m_i\}\vee\{m_i'\})=p_j(\{m_i\vee m_i'\})=m_j\vee m_j'=p_j(\{m_i\})\vee p_j(\{m_i'\})$$

由此可得，投影$p_j:(M,+,\leqslant)\to(M_j,+,\leqslant)$是*Riesz*模满同态。

定理3 设$\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$是范畴$Rie_R^l$中的一簇*Riesz*模，作$\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$的笛卡尔积$(M,+,\leqslant)=\Pi(M_i,+,\leqslant)$，则$\{p_j:(M,+,\leqslant)\to(M_j,+,\leqslant)|j\in I\}$是对象簇$\{(M_i,+,\leqslant)\}$的乘积。

证明 设对任意的*Riesz*模$(N,+,\leqslant)\in ob(Rie_R^l)$，且存在*Riesz*模同态$q_j:(N,+,\leqslant)\to(M_j,+,\leqslant)$，定义$\alpha:(N,+,\leqslant)\to(M,+,\leqslant)$，其中$\forall n\in(N,+,\leqslant)$，$\alpha(n)=\{q_i(n)\}_{i\in I}$. 易知$\alpha$是一个映射，以下证明$\alpha$是*Riesz*模同态：对任意的$x,y\in(N,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$有

$$\alpha(x+y)=\{q_i(x+y)\}=\{q_i(x)+q_i(y)\}=\{q_i(x)\}+\{q_i(y)\}=\alpha(x)+\alpha(y)$$
$$\alpha(rx)=\{q_i(rx)\}=\{rq_i(x)\}=r\{q_i(x)\}=r\alpha(x)$$

又由于

$$\alpha(x\wedge y)=\{q_i(x\wedge y)\}=\{q_i(x)\wedge q_i(y)\}=\{q_i(x)\}\wedge\{q_i(y)\}=\alpha(x)\wedge\alpha(y)$$
$$\alpha(x\vee y)=\{q_i(x\vee y)\}=\{q_i(x)\vee q_i(y)\}=\{q_i(x)\}\vee\{q_i(y)\}=\alpha(x)\vee\alpha(y)$$

故α是*Riesz*模同态。并且对任意的$n\in(N,+,\leqslant)$，$p_j\alpha(n)=p_j\{q_i(n)\}=q_j(n)$，故由$n$的任意性可得$p_j\alpha=q_j$成立。又由于乘积在同构意义下是唯一的，所以$\{p_j:(M,+,\leqslant)\to(M_j,+,\leqslant)|j\in I\}$是对象簇$\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$的乘积。

$$\begin{tikzcd}
(N,+,\leqslant) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "q_j"'] & (M,+,\leqslant) \arrow[d, "p_j"] \\
 & (M_j,+,\leqslant)
\end{tikzcd}$$

图6 *Riesz*模范畴中乘积示意图

引理4 设$\{(M_i,+,\leqslant)|i\in I\}$是范畴中的一簇*Riesz*模，这里的指标集$I$是任意的，记$(L,+,\leqslant)=\oplus(M_i,+,\leqslant)=\{\{m_i\}\in\oplus(M_i,+,\leqslant)|\{m_i\}$中只有有限个$m_i\neq 0\}$，在该集合中规定：对任意的$\{m_i\}$，$\{m_i'\}\in(L,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$有

$$\{m_i\}=\{m_i'\}\text{当且仅当}m_i=m_i',\forall i\in I$$
$$\{m_i\}+\{m_i'\}=\{m_i+m_i'\},r\{m_i\}=\{rm_i\}$$
$$\{m_i\}\wedge\{m_i'\}=\{m_i\wedge m_i'\},\{m_i\}\vee\{m_i'\}=\{m_i\vee m_i'\}$$

则

(1)$(L,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模；

(2)嵌入$q_j:(M_j,+,\leqslant)\to(L,+,\leqslant)$，$q_j(m_j)=\{m_j\delta_{ij}\}$是*Riesz*模单同态，其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

证明 (1)由模论可知，$(L,+,\leqslant)$是一个左$R-$模。又由于$\{m_i\}\wedge\{m_i'\}=\{m_i\wedge m_i'\}$以及$\{m_i\}\vee\{m_i'\}=\{m_i\vee m_i'\}$，故$(L,+,\leqslant)$可以构成一个格，并且对任意的$\{n_i\}\in(L,+,\leqslant)$，若$\{m_i\}\leqslant\{m_i'\}$，$r\geqslant 0$，那么有

$$\{m_i\}+\{n_i\}=\{m_i+n_i\}\leqslant\{m_i'+n_i\}=\{m_i'\}+\{n_i\},r\{m_i\}\geqslant\{0\}$$

故相容关系成立，由此可得$(L,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模。

(2)嵌入$q_j:(M_j,+,\leqslant)\to(L,+,\leqslant)$，$q_j(m_j)=\{m_j\delta_{ij}\}$，显然$q_j$是单射，对任意的$m_j,m_j'\in(M_j,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$有

$$q_j(m_j+m_j')=\{(m_j+m_j')\delta_{ij}\}=\{m_j\delta_{ij}+m_j'\delta_{ij}\}=\{m_j\delta_{ij}\}+\{m_j'\delta_{ij}\}=q_j(m_j)+q_j(m_j')$$

$$q_j(rm_j)=\{rm_j\delta_{ij}\}=r\{m_j\delta_{ij}\}=rq_j(m_j\delta_{ij})$$

成立，又由于

$$q_j(m_j\wedge m_j')=\{(m_j\wedge m_j')\delta_{ij}\}=\{m_j\delta_{ij}\wedge m_j'\delta_{ij}\}=\{m_j\delta_{ij}\}\wedge\{m_j'\delta_{ij}\}=q_j(m_j)\wedge q_j(m_j')$$
$$q_j(m_j\vee m_j')=\{(m_j\vee m_j')\delta_{ij}\}=\{m_j\delta_{ij}\vee m_j'\delta_{ij}\}=\{m_j\delta_{ij}\}\vee\{m_j'\delta_{ij}\}=q_j(m_j)\vee q_j(m_j')$$

由此可得，嵌入 $q_j:(M_j,+,\leqslant)\to(L,+,\leqslant)$ 是 Riesz 模单同态。

定理4 设 $\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$ 是范畴 Rie_R^l 中的一簇 Riesz 模，作 $\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$ 的直和 $(L,+,\leqslant)=\oplus(M_i,+,\leqslant)$，则 $\{q_j:(M_j,+,\leqslant)\to(L,+,\leqslant)|i\in I\}$ 是对象簇 $\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$ 的余积。

证明 设对任意的 Riesz 模 $(N,+,\leqslant)\in ob(Rie_R^l)$，且存在 Riesz 模同态 $p_j:(M_j,+,\leqslant)\to(N,+,\leqslant)$，定义 $\beta:(L,+,\leqslant)\to(N,+,\leqslant)$，其中 $\forall\{m_i\}\in(L,+,\leqslant)$，$\beta(\{m_i\})=\sum p_i(m_i)$. 因为 $\{m_i\}$ 中只有有限个 $m_i\neq 0$，所以 $\sum p_i(m_i)$ 有意义，故 β 是 $(L,+,\leqslant)$ 到 $(N,+,\leqslant)$ 的一个映射。下证 β 是 Riesz 模同态：对任意的 $\{m_i\},\{m_i'\}\in(L,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$ 有

$$\begin{aligned}\beta(\{m_i\}+\{m_i'\})&=\beta(\{m_i+m_i'\})=\sum p_i(m_i+m_i')=\sum p_i(m_i)+p_i(m_i')\\&=\sum p_i(m_i)+\sum p_i(m_i')=\beta(\{m_i\})+\beta(\{m_i'\})\end{aligned}$$
$$\beta(r\{m_i\})=\beta(\{rm_i\})=\sum p_i(rm_i)=\sum rp_i(m_i)=r\sum p_i(m_i)=r\beta(\{m_i\})$$

又由于

$$\begin{aligned}\beta(\{m_i\}\wedge\{m_i'\})&=\beta(\{m_i\wedge m_i'\})=\sum p_i(m_i\wedge m_i')=\sum p_i(m_i)\wedge p_i(m_i')\\&=\sum p_i(m_i)\wedge\sum p_i(m_i')=\beta(\{m_i\})\wedge\beta(\{m_i'\})\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\beta(\{m_i\}\vee\{m_i'\})&=\beta(\{m_i\vee m_i'\})=\sum p_i(m_i\vee m_i')=\sum p_i(m_i)\vee p_i(m_i')\\&=\sum p_i(m_i)\vee\sum p_i(m_i')=\beta(\{m_i\})\vee\beta(\{m_i'\})\end{aligned}$$

故 β 是 Riesz 模同态。并且对任意的 $m_j\in(M_j,+,\leqslant)$，$\beta q_j(m_j)=\beta(\{m_j\delta_{ij}\})=p_j(m_j)$，故由 m_j 的任意性有 $\beta q_j=p_j$ 成立。又由于余积在同构意义下是唯一的，所以 $\{q_j:(M_j,+,\leqslant)\to(L,+,\leqslant)|j\in I\}$ 是对象簇 $\{(M_i,+,\leqslant)\}_{i\in I}$ 的余积。

$$\begin{tikzcd}(M_j,+,\leqslant)\arrow[d,"q_j"']\arrow[dr,"p_j"]&\\(L,+,\leqslant)\arrow[r,"\beta"']&(N,+,\leqslant)\end{tikzcd}$$

图7 Riesz 模范畴中余积示意图

下面讨论 Riesz 模范畴 Rie_R^l 中的等值子和余等值子。

引理5 设 $f,g:(M,+,\leqslant)\to(N,+,\leqslant)\in Mor(Rie_R^l)$，令 $E=\{m\in M|f(m)=g(m)\}$，则

(1) $(E,+,\leqslant)$ 是 $(M,+,\leqslant)$ 的子 Riesz 模；

(2) 嵌入映射 $e:(E,+,\leqslant)\to(M,+,\leqslant)$ 是 Riesz 模同态。

证明 (1) 对于 $0\in(M,+,\leqslant)$ 有 $f(0)=g(0)$，所以 $0\in(E,+,\leqslant)$，显然 $\varnothing\neq E\subseteq M$，即 E 是 M 的非空子集；因为 $f,g\in Mor(Rie_R^l)$，故对任意的 $m_1,m_2\in(E,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$ 有

$$f(m_1+m_2)=f(m_1)+f(m_2)=g(m_1)+g(m_2)=g(m_1+m_2)$$
$$f(rm_1)=rf(m_1)=rg(m_1)=g(rm_1)$$

成立，故 $m_1+m_2\in(E,+,\leqslant)$，$rm_1\in(E,+,\leqslant)$，所以 $(E,+,\leqslant)$ 是 $(M,+,\leqslant)$ 的子模。

又由于

$$f(m_1\wedge m_2)=f(m_1)\wedge f(m_2)=g(m_1)\wedge g(m_2)=g(m_1\wedge m_2)$$
$$f(m_1\vee m_2)=f(m_1)\vee f(m_2)=g(m_1)\vee g(m_2)=g(m_1\vee m_2)$$

成立，故 $m_1\wedge m_2$，$m_1\vee m_2\in(E,+,\leqslant)$，所以 $(E,+,\leqslant)$ 是 $(M,+,\leqslant)$ 的子格。又对任意的 $p\in(E,+,\leqslant)$，若 $m_1\leqslant m_2$，$r\geqslant 0$，那么 $p+m_1\leqslant p+m_2$ 且 $rm_1\geqslant 0$ 成立，故相容关系成立，由此可得，$(E,+,\leqslant)$ 是 $(M,+,\leqslant)$ 的子 Riesz 模。

(2) 因为 $(E,+,\leqslant)$ 是 $(M,+,\leqslant)$ 的子 Riesz 模，所以在 Riesz 模范畴 Rie_R^l 中，嵌入映射 $e:(E,+,\leqslant)\to(M,+,\leqslant)$

是 *Riesz* 模同态。

定理5 设 $f,g:(M,+,\leqslant)\to(N,+,\leqslant)$ 是 *Riesz* 模范畴 Rie_R^l 中的一对平行态射,令 $E=\{m\in M|f(m)=g(m)\}$ 是 $(M,+,\leqslant)$ 的子 *Riesz* 模,则包含态射 $e:(E,+,\leqslant)\to(M,+,\leqslant)$]是平行态射的等值子。

证明 (1)$fe=ge$ 显然成立;

(2)存在性:设 $(E',+,\leqslant)$ 是一个 *Riesz* 模,且存在 *Riesz* 模同态 $e':(E',+,\leqslant)\to(M,+,\leqslant)$ 满足 $fe'=ge'$.

定义函数 $h:(E',+,\leqslant)\to(E,+,\leqslant)$,其中对任意的 $x\in(E',+,\leqslant)$,$h(x)=e'(x)$. 因为 $fe'(x)=ge'(x)$,所以 $e'(x)\in(E,+,\leqslant)$,那么有 $e(h(x))=e(e'(x))=e'(x)$ 成立。由于态射 e' 是 *Riesz* 模同态,即 e' 既是 R 模同态又是格同态,故对任意的 $x,y\in(E',+,\leqslant)$,$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$:

$$h(x+y)=e'(x+y)=e'(x)+e'(y)=h'(x)+h'(y)$$
$$h(rx)=e'(rx)=re'(x)=rh(x)$$

以及

$$h(x\wedge y)=e'(x\wedge y)=e'(x)\wedge e'(y)=h'(x)\wedge h'(y)$$
$$h(x\vee y)=e'(x\vee y)=e'(x)\vee e'(y)=h'(x)\vee h'(y)$$

所以,h 是 *Riesz* 模同态。

$$\begin{tikzcd}
(E,+,\leqslant) \arrow[r, "e"] & (M,+,\leqslant) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (N,+,\leqslant) \\
(E',+,\leqslant) \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

图8 *Riesz* 模范畴中等值子示意图

唯一性:设 $h':(E',+,\leqslant)\to(E,+,\leqslant)$ 也是 *Riesz* 模同态,且 $eh'=e'$,那么对任意的 $x\in(E,+,\leqslant)$,由于 $e(h(x))=e(e'(x))=e'(x)$,故有 $e(h'(x))=h'(x)$ 成立,又由 $eh'=e'$ 有 $e(h'(x))=e'(x)$,所以

$$h'(x)=e(h'(x))=e'(x)=h(x),\forall x\in(E,+,\leqslant)$$

故由 x 的任意性可知 $h'=h$,所以 $e:(E,+,\leqslant)\to(M,+,\leqslant)$ 是平行态射 f 与 g 的等值子。

定义14 设 θ 是 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的一个等价关系,若 $(M,+,\leqslant)$ 中的元素 m 与 n 具有关系 θ,则记作 $m\equiv n(\mathrm{mod}\theta)$. 如果对任意的 $m,n,p,q\in(M,+,\leqslant)$,$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$,当 $m\equiv p(\mathrm{mod}\theta)$,$n\equiv q(\mathrm{mod}\theta)$ 成立时,有

$$m+n\equiv(p+q)(\mathrm{mod}\theta),rm\equiv rp(\mathrm{mod}\theta)$$
$$m\wedge n\equiv(p\wedge q)(\mathrm{mod}\theta),m\vee n\equiv(p\vee q)(\mathrm{mod}\theta)$$

则称 θ 是 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的同余关系,称 $(M/\theta,+,\leqslant)=\{\theta(m)|m\in M\}$ 为 $(M,+,\leqslant)$ 关于同余关系 θ 的商集。若定义映射 $q:(M,+,\leqslant)\to(M/\theta,+,\leqslant)$ 满足 $q(m)=\theta(m)$,即把 $(M,+,\leqslant)$ 中的元素 m 映射到 m 的等价类 $\theta(m)$,这样的映射称为自然映射。

引理6 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的任意多个同余关系的交仍为同余关系。

证明 设 $\{\theta_i|i\in I\}$ 为 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的一簇同余关系,这里的指标集 I 是任意的。由 θ_i 是 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的等价关系可以验证 $\bigcap\theta_i$ 为等价关系。事实上,

①自反性:对任意的 $m\in(M,+,\leqslant)$ 有 $(m,m)\in\bigcap\theta_i(i\in I)$,故 $(m,m)\in\bigcap\theta_i$.

②对称性:对任意的 $m,n\in(M,+,\leqslant)$,若 $(m,n)\in\bigcap\theta_i$,则对任意的 $\theta_i(i\in I)$ 有 $(m,n)\in\theta_i$,从而 $(n,m)\in\theta_i$,所以 $(n,m)\in\bigcap\theta_i$.

③传递性:对任意的 $m,n,p\in(M,+,\leqslant)$,若 $(m,n)\in\bigcap\theta_i$,$(n,p)\in\bigcap\theta_i$,则对任意的 $\theta_i(i\in I)$ 有 $(m,n)\in\theta_i$,$(n,p)\in\theta_i$,从而 $(m,p)\in\theta_i$,所以 $(m,p)\in\bigcap\theta_i$.

以下证明 θ_i 是 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的同余关系:对任意的 $m,n,p,q\in(M,+,\leqslant)$,$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$,若 $(m,p)\in\bigcap\theta_i$,$(n,q)\in\bigcap\theta_i$,则对任意的 $\theta_i(i\in I)$ 均有 $(m,p)\in\theta_i$,$(n,q)\in\theta_i$,所以有

$$(m+n,p+q)\in\theta_i,(rm,rp)\in\theta_i,(m\wedge n,p\wedge q)\in\theta_i,(m\vee n,p\vee q)\in\theta_i$$

从而

$$(m+n,p+q)\in\bigcap\theta_i,(rm,rp)\in\bigcap\theta_i,(m\wedge n,p\wedge q)\in\bigcap\theta_i,(m\vee n,p\vee q)\in\bigcap\theta_i$$

所以 $\bigcap\theta_i$ 是 *Riesz* 模 $(M,+,\leqslant)$ 上的同余关系。

引理6 设 θ 是 *Riesz* 模 $(N,+,\leqslant)$ 中的 *Riesz* 模同余关系,在 *Riesz* 模 $(N,+,\leqslant)$ 关于 θ 的商

$N/\theta=\{\theta(n)|n\in N\}$中规定：对任意的$n_1,n_2\in(N,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$有

$$\theta(n_1)+\theta(n_2)=\theta(n_1+n_2),r\theta(n_1)=\theta(rn_1)$$

$$\theta(n_1)\wedge\theta(n_2)=\theta(n_1\wedge n_2),\theta(n_1)\vee\theta(n_2)=\theta(n_1\vee n_2)$$

则

（1）$N/\theta,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模；

（2）自然映射$q:(N,+,\leqslant)\to(N/\theta,+,\leqslant)$是*Riesz*模同态。

证明　（1）首先证明“运算与代表元的选取无关”。对任意的$n_1',n_2'\in(N,+,\leqslant)$满足$n_1\sim n_1',n_2\sim n_2'$，即$\theta(n_1)=\theta(n_1'),\theta(n_2)=\theta(n_2')$，那么由

$$\theta(n_1)+\theta(n_2)=\theta(n_1+n_2)=\theta(n_1'+n_2')=\theta(n_1')+\theta(n_2')$$

$$r\theta(n_1)=\theta(rn_1)=\theta(rn_1')=r\theta(n_1')$$

$$\theta(n_1)\wedge\theta(n_2)=\theta(n_1\wedge n_2)=\theta(n_1'\wedge n_2')=\theta(n_1')\wedge\theta(n_2')$$

$$\theta(n_1)\vee\theta(n_2)=\theta(n_1\vee n_2)=\theta(n_1'\vee n_2')=\theta(n_1')\vee\theta(n_2')$$

可知，该运算与代表元的选取无关。

其次证明$(N/\theta,+,\leqslant)$是一个*Abel l*-群：

① 结合律：对$\forall\theta(n_1),\theta(n_2),\theta(n_3)\in(N/\theta,+,\leqslant)$，满足

$$\begin{aligned}\theta(n_1)+(\theta(n_2)+\theta(n_3))&=\theta(n_1)+\theta(n_2+n_3)=\theta(n_1+(n_2+n_3))\\&=\theta((n_1+n_2)+n_3)=(\theta(n_1)+\theta(n_2))+\theta(n_3)\end{aligned}$$

②单位元：对$\forall\theta(n)\in(N/\theta,+,\leqslant)$，存在$\theta(0)\in(N/\theta,+,\leqslant)$使得$\theta(n)+\theta(0)=\theta(n+0)=\theta(n)$，故单位元存在。

③逆元：对$\forall\theta(n)\in(N/\theta,+,\leqslant)$，存在$\theta(-n)\in(N/\theta,+,\leqslant)$使得$\theta(n)+\theta(-n)=\theta(n-n)=\theta(0)$，故逆元存在。

④交换律：对$\forall\theta(n_1),\theta(n_2)\in(N/\theta,+,\leqslant)$，满足

$$\theta(n_1)+\theta(n_2)=\theta(n_1+n_2)=\theta(n_2+n_1)=\theta(n_2)+\theta(n_1).$$

⑤相容性：对$\forall\theta(n_1),\theta(n_2),\theta(p)\in(N/\theta,+,\leqslant)$，$\theta(n_1)\leqslant\theta(n_2)$有$\theta(p)+\theta(n_1)=\theta(p+n_1)\leqslant\theta(p+n_2)=\theta(p)+\theta(n_2)$，故满足相容性条件。

以下证明$(N/\theta,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模。由模论可知$(N/\theta,+,\leqslant)$是一个左R－模。事实上，$N/\theta=\{\theta(n)|n\in N\}$是一个*Abel*群，且满足以下性质：

①$\forall r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$，$\forall\theta(n)\in(N/\theta,+,\leqslant)$有：$r\theta(n)=\theta(rn)\in(N/\theta,+,\leqslant)$；

②$\forall r_1,r_2,r\in(R,+,\cdot,\leqslant)$，$\forall\theta(n_1),\theta(n_2),\theta(n)\in(N/\theta,+,\leqslant)$有

$$\begin{aligned}(r_1+r_2)(\theta(n))&=\theta((r_1+r_2)n)=\theta(r_1n+r_2n)\\&=\theta(r_1n)+\theta(r_2n)=r_1\theta(n)+r_2\theta(n)\\r(\theta(n_1)+\theta(n_2))&=r(\theta(n_1+n_2))=\theta(r(n_1+n_2))\\&=\theta(rn_1+rn_2)=\theta(rn_1)+\theta(rn_2)\\&=r\theta(n_1)+r\theta(n_2)\end{aligned}$$

③$\forall r_1,r_2\in(R,+,\cdot,\leqslant)$，$\forall\theta(n)\in(N/\theta,+,\leqslant)$有

$$r_1(r_2(\theta(n))=r_1(\theta(r_2n))=\theta(r_1(r_2n))=\theta((r_1r_2)n)=r_1r_2\theta(n)$$

又由于对任意的$\theta(n_1),\theta(n_2),\theta(n_3)\in(N/\theta,+,\leqslant)$满足：

①幂等律：$\theta(n_1)\wedge\theta(n_1)=\theta(n_1\wedge n_1)=\theta(n_1)$，$\theta(n_1)\vee\theta(n_1)=\theta(n_1\vee n_1)=\theta(n_1)$

②交换律：$\theta(n_1)\wedge\theta(n_2)=\theta(n_1\wedge n_2)=\theta(n_2\wedge n_1)=\theta(n_2)\wedge\theta(n_1)$

$$\theta(n_1)\vee\theta(n_2)=\theta(n_1\vee n_2)=\theta(n_2\vee n_1)=\theta(n_2)\vee\theta(n_1)$$

③结合律：

$$\begin{aligned}\theta(n_1)\wedge(\theta(n_2)\wedge\theta(n_3))&=\theta(n_1)\wedge(\theta(n_2\wedge n_3))=\theta(n_1\wedge(n_2\wedge n_3))\\&=\theta((n_1\wedge n_2)\wedge n_3))=\theta(n_1\wedge n_2)\wedge\theta(n_3)\\&=(\theta(n_1)\wedge\theta(n_2))\wedge\theta(n_3)\\\theta(n_1)\vee(\theta(n_2)\vee\theta(n_3))&=\theta(n_1)\vee(\theta(n_2\vee n_3))=\theta(n_1\vee(n_2\vee n_3))\\&=\theta((n_1\vee n_2)\vee n_3))=\theta(n_1\vee n_2)\vee\theta(n_3)\end{aligned}$$

$$= (\theta(n_1) \vee \theta(n_2)) \vee \theta(n_3)$$

④吸收律:$\theta(n_1) \vee (\theta(n_1) \wedge \theta(n_2)) = \theta(n_1) \vee (\theta(n_1 \wedge n_2)) = \theta(n_1 \vee (n_1 \wedge n_2)) = \theta(n_1)$

$$\theta(n_1) \wedge (\theta(n_1) \vee \theta(n_2)) = \theta(n_1) \wedge (\theta(n_1 \vee n_2)) = \theta(n_1 \wedge (n_1 \vee n_2)) = \theta(n_1)$$

所以$(N/\theta, +, \leqslant)$是一个格。又对任意的$\theta(p) \in (N/\theta, +, \leqslant)$,若$\theta(n_1) \leqslant \theta(n_2)$,$r \geqslant 0$,那么有

$$\theta(p) + \theta(n_1) = \theta(p + n_1) \leqslant \theta(p + n_2) = \theta(p) + \theta(n_2),\ r\theta(n_1) \leqslant r\theta(n_2)$$

故相容关系成立,由此可得$(N/\theta, +, \leqslant)$是一个*Riesz*模。

(2)自然映射$q:(N, +, \leqslant) \to (N/\theta, +, \leqslant)$,$q(n) = \theta(n)$,$\forall n \in (N, +, \leqslant)$. 对任意的$n_1, n_2 \in (N, +, \leqslant)$,$r \in (R, +, \cdot, \leqslant)$有

$$q(n_1 + n_2) = \theta(n_1 + n_2) = \theta(n_1) + \theta(n_2) = q(n_1) + q(n_2)$$
$$q(rn_1) = \theta(rn_1) = r\theta(n_1) = rq(n_1)$$

成立,且

$$q(n_1 \wedge n_2) = \theta(n_1 \wedge n_2) = \theta(n_1) \wedge \theta(n_2) = q(n_1) \wedge q(n_2)$$
$$q(n_1 \vee n_2) = \theta(n_1 \vee n_2) = \theta(n_1) \vee \theta(n_2) = q(n_1) \vee q(n_2)$$

成立,由此可得,q是*Riesz*模同态。

定义15 设$(M, +, \leqslant)$是一个*Riesz*模,$R \subseteq M \times M$是M上的一个二元关系,令$\langle R \rangle = \bigcap\{\theta | R \subseteq \theta, \theta$是$M$上的同余关系$\}$,根据引理6,$\langle R \rangle$是$(M, +, \leqslant)$上的同余关系,称为由$R$生成的最小同余关系。

定理6 设$f, g:(M, +, \leqslant) \to (N, +, \leqslant)$是*Riesz*模范畴$Rie_R^l$中的一对平行态射,$\theta$是*Riesz*模$(N, +, \leqslant)$上包含$\{(f(m), g(m)) | m \in M\}$的最小同余关系,则自然商同态$q:(N, +, \leqslant) \to (N/\theta, +, \leqslant)$是平行态射的余等值子且$q(n) = \theta(n)$.

证明 (1)根据引理6,因为$(N/\theta, +, \leqslant)$是*Riesz*商模$(N/\theta, +, \leqslant) = \{\theta(n) | n \in N\}$,其中$\theta(n)$是$n$的同余类,所以对任意的$m \in (M, +, \leqslant)$,有$q(f(m)) = \theta(f(m))$,$q(g(m)) = \theta(g(m))$,又由于$(f(m), g(m)) \in \theta$,所以$\theta(f(m)) = \theta(g(m))$,故$q(f(m)) = q(g(m))$,则由$m$的任意性可知$qf = qg$成立。

(2)存在性:设$(L, +, \leqslant)$是*Riesz*模,并且存在*Riesz*模同态$q':(N, +, \leqslant) \to (L, +, \leqslant)$使得$q'f = q'g$. 定义$\pi:(N/\theta, +, \leqslant) \to (L, +, \leqslant)$,其中$\forall n \in (N, +, \leqslant)$,$\pi(\theta(n)) = q'(n)$,那么$\pi(q(n)) = \pi(\theta(n)) = q'(n)$. 因为对任意的$n, n' \in (N, +, \leqslant)$,若$n = n'$,则有$q'(n) = q(n')$成立,那么对任意的$\theta(n), \theta(n') \in (N/\theta, +, \leqslant)$,若$\theta(n) = \theta(n')$,则$\pi(\theta(n)) = q'(n) = q'(n') = \pi(\theta(n'))$,所以$\pi$是映射。以下证明$\pi$是*Riesz*模同态。

首先对任意的$x, y \in (N, +, \leqslant)$,$r \in (R, +, \cdot, \leqslant)$:有

$$\pi(\theta(x) + \theta(y)) = \pi(q(x) + q(y)) = \pi(q(x + y)) = q'(x + y)$$
$$= q'(x) + q'(y) = \pi(\theta(x)) + \pi(\theta(y))$$
$$\pi(r\theta(x)) = \pi(\theta(rx)) = q'(rx) = rq'(x) = r\pi(\theta(x))$$

其次,又由于

$$\pi(\theta(x) \wedge \theta(y)) = \pi(q(x) \wedge q(y)) = \pi(q(x) \wedge q(y)) = \pi(q(x \wedge y))$$
$$= q'(x \wedge y) = q'(x) \wedge q'(y) = \pi(\theta(x)) \wedge \pi(\theta(y))$$
$$\pi(\theta(x) \vee \theta(y)) = \pi(q(x) \vee q(y)) = \pi(q(x) \vee q(y)) = \pi(q(x \vee y))$$
$$= q'(x \vee y) = q'(x) \vee q'(y) = \pi(\theta(x)) \vee \pi(\theta(y))$$

故θ是*Riesz*模同态。

$$\begin{tikzcd}
(M,+,\leqslant) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (N,+,\leqslant) \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & (N/\theta,+,\leqslant) \arrow[d, dashed, "\pi"] \\
 & & (L,+,\leqslant)
\end{tikzcd}$$

图9 *Riesz*模范畴中余等值子示意图

唯一性:假设存在$\pi':(N/\theta, +, \leqslant) \to (L, +, \leqslant)$使得$\pi'q = q'$,由于对$\forall n \in (N, +, \leqslant)$有$q(n) = \theta(n)$且$\pi(\theta(n)) = q'(n)$,则有$\pi(q(n)) = \pi(\theta(n)) = q'(n)$. 因此

$$\pi'(q(n)) = \pi'(\theta(n)) = q'(n) = \pi(\theta(n)) = \pi(q(n))$$

即 $\pi'(q(n)) = \pi(q(n))$,由 n 的任意性可知,$\pi' = \pi$.

综上可知,存在唯一的态射 $\pi:(N/\theta, +, \leqslant) \to (L, +, \leqslant)$ 使得 $q' = \pi q$ 成立,所以 $q:(N, +, \leqslant) \to (N/\theta, +, \leqslant)$ 是平行态射的余等值子。

定理7 *Riesz*模范畴 Rie_R^l 是完备范畴。

证明 由定理3和定理5可知,*Riesz*模范畴 Rie_R^l 存在乘积和等值子,故由引理1可知,*Riesz*模范畴 Rie_R^l 是完备范畴。

定理8 *Riesz*模范畴 Rie_R^l 是余完备范畴。

证明 由定理4和定理6可知,*Riesz*模范畴 Rie_R^l 存在余积和余等值子,故由引理2可知,*Riesz*模范畴 Rie_R^l 是余完备范畴。

参考文献:

[1] BIRKHOFF G.Lattice-ordered Groups[J].Providence:Mathematics Department,Princeton University,1942,43(02):298-331.

[2] BIRKHOFF G,PIERCE R S.Lattice-ordered Rings[J].Anais Da Academia Brasileira De Ciências,1956,(28):41-69.

[3] RIESZ F. Sur Quelques Notions Fondamentales Dans La Theorie Generale Des Operations Lineaires[J]. Princeton:Annals of Mathematics,1940,41(01):174-206.

[4] 戴天佑.序理论的基础[M].纽约:纽约约克学院,2008.

[5] 崔晓宇,周璞铉,汤建钢,等.左R-模上Riesz空间的相关性质研究[J].伊犁师范大学学报(自然科学版),2022,16(04):1-7.

[6] 孙锐娟,汤建钢.左R-模上Riesz空间的同态和同构性质研究[J].伊犁师范大学学报(自然科学版),2023,17(02):1-8.

[7] 刘晓芳,汤建钢.Riesz模范畴中直积与直和的性质研究[J].伊犁师范大学学报(自然科学版),2023,17(03):1-12.

[8] 李桃生.范畴与同调代数基础[M].北京:华东师范大学出版社,1986.

[9] BIRKHOFF G.Lattice Theory[M].Providence:American Mathematical Society Colloquium,1967.

[10] 张娟娟,汤建钢.Ω-左R-模范畴的完备性[J].数学的实践与认识,2013,43(23):268-274.

[11] 耿俊,汤建钢,聂晓艳.范畴Ω-Cat的完备性[J].模糊系统与数学,2012,26(02):147-151.

[12] AWODEY S.Category Theory[M].Oxford:Clarendon Press,2006.

[13] 徐晓泉.完全分配格范畴的完备性与余完备性(英文)[J].四川大学学报(自然科学版),1992,(03):345-347.

[14] 贺伟.范畴论[M].北京:科学出版社,2006.

[15] 魏武.L-半格范畴[D].长沙:湖南大学,2010.

[16] 曾志宣,罗从文.L-半格的性质[J].三峡大学学报(自然科学版),2009,31(02):103-109.

Completeness and Cocompleteness of the Category of Riesz Modules

LI Dan-yang[1],TANG Jian-gang[1,2]

(*1. College of Mathematics and Statistics,Yili Normal University,Yining,Xinjiang,835000,China;*
2. Institute of Applied Mathematics,Yili Normal University,Yining,Xinjiang,835000,China)

Abstract:Category theory is the foundation of modern mathematics. Starting from the category of Riesz modules,the study of the internal characteristics of Riesz modules is an important method for studying Riesz modules. The limit of a category is one of the key concepts of category theory. The concepts of product and equalizer in the category can all be seen as some kind of special limit of the category,and the coproduct and coequalizer are special colimits. The existence of a limit in the category determines the completeness of the category,and the existence of a colimit determines cocompleteness. Specific representations of product and coproduct,equalizer and coequalizer in the category of Riesz modules are given by studying the limits of the category of Riesz modules with Riesz modules as objects and Riesz modules homomorphisms as morphisms,which in turn prove that the category of Riesz modules has completeness and cocompleteness.

Keywords:Riesz modules;Category;Equalizer;Coequalizer;Completeness;Cocompleteness