第43卷 第3期 《新疆师范大学学报》(自然科学版) Vol.43,No.3
2024年9月 Journal of Xinjiang Normal University Sept. 2024
(Natural Sciences Edition)

*Riesz*模范畴中拉回与推出的性质研究

余萧雯[1],汤建钢[1,2],李丹阳[1]
(1.伊犁师范大学 数学与统计学院,新疆 伊宁 835000;2.伊犁师范大学 应用数学研究所,新疆 伊宁 835000)

摘 要:拉回和推出也称为纤维积和纤维余积,是范畴论中两个重要的对偶概念,属于数学中诸多概念的抽象,具有丰富的内涵。文章在*Riesz*模范畴中研究拉回与推出的存在性和唯一性。首先引入拉回的概念,构造出满足*Riesz*模范畴中拉回概念的一个对象和一对态射,并证明拉回的存在性和唯一性;对偶地,在*Riesz*模范畴中引入同余关系的概念,在此基础上,运用同余关系作商,定义出了*Riesz*模的商的概念,再对推出的概念进行定义,构造出满足*Riesz*模范畴中推出概念的一个对象和一对态射,并证明推出的存在性和唯一性。

关键词:*Riesz*模;范畴;拉回;推出

中图分类号:O153.1;O153.3 **文献标识码:**A **文章编号:**1008-9659(2024)03-0055-09

1928年,Riesz[1]首次提出了*Riesz*空间的概念,将格序结构引入到向量空间,并形成了*Riesz*空间的一些基础理论。戴天佑指出*Riesz*空间是一个实数上的有序向量空间[2],并将*Riesz*空间理论进一步扩展和完善。Birkhoff将格序结构引入到群中,得到了格序群(l-群)的相关概念[3]。Johnson又将格序结构引入到环中,得到格序环(l-环)的相关概念[4]。模是域上线性空间概念的推广,并且是代数学中重要的代数结构之一,其重要性超过了线性空间。因此将格序结构引入到左R-模中很有必要。在*Riesz*空间的理论基础上,崔晓宇等人引入了左R-模上*Riesz*空间的概念,研究了左R-模上*Riesz*空间的基本性质[5]。谭志航等人将群的基本同态定理推广到格序环(l-环)与格序模(l-模)中[6]。范畴论从整体上研究空间形式和数量关系的联系与转化,能够很好地揭示事物的外部特征。在左R-模上*Riesz*空间的基础上,刘晓芳等人引入了*Riesz*模范畴的概念,定义了该范畴中的直积和直和[7]。周伟在格序模范畴中证明了f-张量积的存在性和唯一性[8]。拉回和推出也称为纤维积和纤维余积,是范畴论中的两个对偶概念,其研究具有重要的意义[9]。文章在*Riesz*模范畴中研究拉回与推出的性质,分别证明了拉回与推出的存在性和唯一性。

1 预备知识

定义1[10] 设$(L,\leqslant)$是非空偏序集,若对任意$a,b\in L$,a与b的上确界$\sup\{a,b\}$与下确界$\inf\{a,b\}$都存在并属于L,则称偏序集$(L,\leqslant)$是一个格,用$a\vee b$,$a\wedge b$分别表示$\sup\{a,b\}$,$\inf\{a,b\}$,并且用四元序$(L,\leqslant,\wedge,\vee)$表示格,简记为$L$.

定义2[10] 设P,Q是格,$f{:}P\to Q$是映射,若对任意$a,b\in P$,有$f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$,$f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)$,则称$f$为格同态。

定义3[10] 五元序$(G,+,\leqslant,\wedge,\vee)$称为一个*Abel* l-群,如果满足下列条件:

(1)$(G,+)$是一个*Abel*群;

(2)$(G,\leqslant,\wedge,\vee)$是一个格;

[收稿日期]2024-01-03 [修回日期]2024-03-20
[基金项目]伊犁师范大学提升学科综合实力专项项目(22XKZZ20)。
[作者简介]余萧雯(2000-),女,硕士研究生,主要从事范畴论及其应用方面研究,E-mail:465966048@qq.com.

(3)对任意$a,b,c \in G$,若$a \leqslant b$,则$a + c \leqslant b + c$也称$(G,+, \leqslant ,\wedge,\vee)$是一个$Abel$格序群,也称为$Abel\ l$−群。

定义4[10] 如果六元序$(R,+,\cdot, \leqslant ,\wedge,\vee)$满足下列条件:

(1)$(R,+,\cdot)$是一个具单位元1_R的环;

(2)$(R, \leqslant ,\wedge,\vee)$是一个格;

(3)相容关系:对任意$r, s, t \in R$,如果$r \leqslant s$,$t \geqslant 0$则$tr \leqslant ts$且$rt \leqslant st$,则称$(R,+,\cdot, \leqslant ,\wedge,\vee)$是一个格序环,也称为$l$−环。

注1 记$R^+ = \{ r \in R \mid r \geqslant 0 \}$,则定义4中条件(3)等价于$R^+R^+ \subseteq R^+$.

定义5[10] 设$(R,+,\cdot, \leqslant ,\wedge,\vee)$是一个$l$−环,如果$(M,+, \leqslant ,\wedge,\vee)$满足下列条件:

(1)$(M,+, \leqslant ,\wedge,\vee)$是$Abel\ l$−群;

(2)相容条件:$\forall m, n, p \in M$,$\forall r \in R(r \geqslant 0)$,如果$m \leqslant n$,则$rm \leqslant rn$,则称$(M,+, \leqslant ,\wedge,\vee)$是左$R$−模上的$Riesz$空间,也称为格序左$R$−模,简称为$Riesz$模,记作$(M,+, \leqslant)$.

注2 记$M^+ = \{ m \in M \mid m \geqslant 0 \}$,则定义5中的条件:$\forall m,n \in M$,$\forall r \in R(r \geqslant 0)$,$m \leqslant n$,$r \geqslant 0$,则$rm \leqslant rn$等价于:$\forall m \in M$,$\forall r \in R$,$m \geqslant 0$,$r \geqslant 0$,则$rm \geqslant 0$等价于:$R^+M^+ \subseteq M^+$.

定义6[10] 设$(M,+, \leqslant)$,$(N,+, \leqslant)$是两个$Riesz$模,f是$(M,+, \leqslant)$到$(N,+, \leqslant)$的映射,若f既是左R−模同态又是格同态,则称f是由$(M,+, \leqslant)$到$(N,+, \leqslant)$的$Riesz$模同态,记作$f:(M,+, \leqslant) \to (N,+, \leqslant)$.

定义7[10] 以$Riesz$模为对象,$Riesz$模同态为态射,可构成一个范畴,称之为$Riesz$模范畴。

定义8[5] 设$(M,+, \leqslant)$是一个$Riesz$模,N是M的子集,并且$(N,+)$是$(M,+)$的子模,$(N, \leqslant)$是$(M, \leqslant)$的子格,并且$R^+N^+ \in N^+$,则称$(N,+, \leqslant)$是$(M,+, \leqslant)$的一个子$Riesz$模。

定义9[11] 设M_1,M_2都是R模,$M_1 \times M_2$也是R模,称为模M_1与M_2的直积,记为$M_1 \times M_2$.

定义10[12] 设M_1,M_2都是R模,$M = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$. 规定$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,$a(x_1,x_2) = (ax_1,ax_2)$,则$M$是一个$R$模,$M$称为模$M_1$和$M_2$的直和,记为$M_1 \oplus M_2$.

定义11[13] 设θ是$Riesz$模$(M,+, \leqslant)$上的一个等价关系,对任意$m,n \in (M,+, \leqslant)$,m与n具有关系θ记作$m \equiv n(\mathrm{mod}\theta)$. 如果对任意的$m, n, p, q \in (M,+, \leqslant)$,$r \in (R,+ \leqslant)$,$m \equiv p(\mathrm{mod}\theta)$,$n \equiv q(\mathrm{mod}\theta) \Rightarrow m \vee n(\mathrm{mod}\theta) \equiv p \vee q(\mathrm{mod}\theta)$且$m \wedge n(\mathrm{mod}\theta) \equiv p \wedge q(\mathrm{mod}\theta)$,$m + n \equiv (p + q)(\mathrm{mod}\theta)$,$rm \equiv rp(\mathrm{mod}\theta)$则称$\theta$是$Riesz$模$(M,+, \leqslant)$上的同余关系,对任意$m \in (M,+, \leqslant)$,$m$所在的等价类记作$m/\theta$,即$m/\theta = \{ n \in (M,+, \leqslant) \mid n \equiv m(\mathrm{mod}\theta) \}$,则称$(M,+, \leqslant)/\theta = \{\theta(m) \mid m \in (M,+, \leqslant)\}$为$(M,+, \leqslant)$关于同余关系$\theta$的商。

定义12[11] 在范畴$\mathbb{C}$中,$\varphi \in Hom(A, X)$,$\psi \in Hom(B, X)$,$\{\varphi,\psi\}$的拉回是指一个对象Y和一对态射α,β,记作(Y,α,β). 其中$\alpha \in Hom(Y, A)$,$\beta \in Hom(Y, B)$使得$\varphi\alpha = \psi\beta$,且对任意的对象$\mathbb{Z}$及任意的$\gamma \in Hom(Z, A)$,任意的$\delta \in Hom(Z, B)$,当$\varphi\gamma = \psi\delta$时,存在唯一的$\xi \in Hom(Z, Y)$使$\gamma = \alpha\xi$,$\delta = \beta\xi$(图1)。

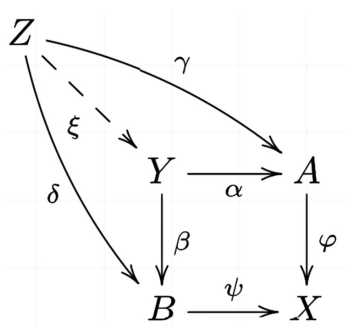

图1 拉回图

定义13[11] 在范畴$\mathbb{C}$中,$\varphi \in Hom(X, A)$,$\psi \in Hom(X, B)$,$\{\varphi, \psi\}$的推出是指一个对象Y和一对态射α,β,记作(Y, α, β). 其中$\alpha \in Hom(A,Y)$,$\beta \in Hom(B,Y)$,使得$\alpha\varphi = \beta\psi$,且对任意的对象$\mathbb{Z}$及任意的$\gamma \in Hom(A, Z)$,任意的$\delta \in Hom(B, Z)$,当$\gamma\varphi = \delta\psi$时,存在唯一的$\xi \in Hom(Y,Z)$使$\gamma = \xi\alpha$,$\delta = \xi\beta$(图2)。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr, bend right, "\delta"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\xi"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}
$$

图2　推出图

2　主要结果

定理 1[7]　设$(M_1,+,\leqslant)$,$(M_2,+,\leqslant)$都是*Riesz*模,$(M_1\times M_2,+,\leqslant)=((m_1,m_2)\mid m_1\in(M_1,+\leqslant),m_1\in(M_2,+\leqslant))$,规定

$$(m_1,m_2)+(m_1',m_2')=(m_1+m_1',m_2+m_2')$$
$$r(m_1,m_2)=(rm_1,rm_2)(r\in R)$$
$$(m_1,m_2)\vee(m_1',m_2')=(m_1\vee m_1',m_2\vee m_2')$$
$$(m_1,m_2)\wedge(m_1',m_2')=(m_1\wedge m_1',m_2\wedge m_2')$$

则$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模。

证明　由文献[11]知,$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$是一个左$R$-模。

对任意的(m_1,m_2),$(m_1',m_2')\in(M_1\times M_2,+,\leqslant)$,有

$$(m_1,m_2)\vee(m_1',m_2')=(m_1\vee m_1',m_2\vee m_2')\in(M_1\times M_2,+,\leqslant)$$
$$(m_1,m_2)\wedge(m_1',m_2')=(m_1\wedge m_1',m_2\wedge m_2')\in(M_1\times M_2,+,\leqslant)$$

故$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$是一个格。

对任意的(m_1,m_2),(m_1',m_2'),$(p_1,p_2)\in(M_1\times M_2,+,\leqslant)$,$r\in(R,+,\leqslant)$,若$(m_1,m_2)\leqslant(m_1',m_2')$,则$(m_1,m_2)+(p_1,p_2)=(m_1+p_1,m_2+p_2)\leqslant(m_1'+p_1,m_2'+p_2)=(m_1',m_2')+(p_1,p_2)$. 若$(m_1,m_2)\geqslant(0,0)$,$r\geqslant 0$,则$r(m_1,m_2)=(rm_1,rm_2)\geqslant(0,0)$. 故满足相容关系,因此$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模,所以$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$为$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的直积。

定义 14　设$(M_1,+,\leqslant)$,$(M_2,+,\leqslant)$都是*Riesz*模,则$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$也是*Riesz*模,称为$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的直积。

注 3　在*Riesz*模范畴中$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$是*Riesz*模$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的直积就是*Riesz*模$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的积。

引理 1　设$(M_1,+,\leqslant)$,$(M_2,+,\leqslant)$,$(M_3,+,\leqslant)$是*Riesz*模,φ是$(M_1,+,\leqslant)$到$(M_3,+,\leqslant)$的*Riesz*模同态,ψ是$(M_2,+,\leqslant)$到$(M_3,+,\leqslant)$的*Riesz*模同态,令$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$的子集$(N,+,\leqslant)=\{(m_1,m_2)\mid\varphi(m_1)=\psi(m_2)\}$,则$(N,+,\leqslant)$是$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$的一个子*Riesz*模。

证明　对任意的(m_1,m_2),$(m_1',m_2')\in(N,+,\leqslant)$,$r\in(R,+,\leqslant)$有

$$\varphi(m_1+m_1')=\varphi(m_1)+\varphi(m_1')=\psi(m_2)+\psi(m_2')=\psi(m_2+m_2')$$

因此$(m_1+m_1',m_2+m_2')\in(N,+,\leqslant)$,又因为$(m_1,m_2)+(m_1',m_2')=(m_1+m_1',m_2+m_2')$,所以$(m_1,m_2)+(m_1',m_2')\in(N,+,\leqslant)$. 因为

$$\varphi(rm_1)=r\varphi(m_1)=r\psi(m_2)=\psi(rm_2)$$

所以$(rm_1,rm_2)\in(N,+,\leqslant)$,即$r(m_1,m_2)\in(N,+,\leqslant)$,故$(N,+,\leqslant)$是$(M_1\times M_2,+,\leqslant)$的一个子模。

对任意的(m_1,m_2),$(m_1',m_2')\in(N,+,\leqslant)$有

$$\varphi(m_1\vee m_1')=\varphi(m_1)\vee\varphi(m_1')=\psi(m_2)\vee\psi(m_2')=\psi(m_2\vee m_2')$$

$$\varphi(m_1 \wedge m_1') = \varphi(m_1) \wedge \varphi(m_1') = \psi(m_2) \wedge \psi(m_2') = \psi(m_2 \wedge m_2')$$

因此 $(m_1 \vee m_1', m_2 \vee m_2') \in (N,+,\leqslant)$, $(m_1 \wedge m_1', m_2 \wedge m_2') \in (N,+,\leqslant)$. 又因为 $(m_1, m_2) \vee (m_1', m_2') = (m_1 \vee m_1', m_2 \vee m_2')$, $(m_1, m_2) \wedge (m_1', m_2') = (m_1 \wedge m_1', m_2 \wedge m_2')$, 即 $(m_1, m_2) \vee (m_1', m_2') \in (N,+,\leqslant)$, $(m_1,m_2) \wedge (m_1',m_2') \in (N,+,\leqslant)$,故$(N,+,\leqslant)$是$(M_1 \times M_2,+,\leqslant)$的一个子格。

对任意的(m_1,m_2),(m_1', m_2'),$(p_1,p_2) \in (N,+,\leqslant)$,$r \in (R,+,\leqslant)$,若$(m_1,m_2) \leqslant (m_1',m_2')$,因为$(m_1,m_2)+(p_1,p_2)$,$(m_1',m_2')+(p_1,p_2) \in (N,+,\leqslant)$ 所以 $(m_1,m_2)+(p_1,p_2) \leqslant (m_1',m_2')+(p_1,p_2)$. 若 $(m_1,m_2) \geqslant (0,0)$, $r \geqslant 0$, $(m_1,m_2) \in (N,+,\leqslant)$,$r \in (R,+,\leqslant)$,所以$r(m_1,m_2) \geqslant 0$. 故满足相容关系,因此$(N,+,\leqslant)$是$(M_1 \times M_2,+,\leqslant)$的一个子*Riesz*模。

引理2 设$(M_1,+,\leqslant)$,$(M_2,+,\leqslant)$是*Riesz*模,$(N,+,\leqslant)$是$(M_1 \times M_2,+,\leqslant)$的子*Riesz*模,$\alpha$是$(N,+,\leqslant)$到$(M_1,+,\leqslant)$的映射,$\beta$是$(N,+,\leqslant)$到$(M_2,+,\leqslant)$的映射,规定:对 $\forall (m_1,m_2) \in (N,+,\leqslant)$, $\alpha(m_1,m_2) = m_1$, $\beta(m_1,m_2) = m_2$,则α、β是*Riesz*模同态。

证明 对任意的(m_1,m_2),$(m_1',m_2') \in (N,+,\leqslant)$,$r \in (R,+,\leqslant)$有

$$\alpha((m_1,m_2)+(m_1',m_2')) = \alpha(m_1 + m_1',m_2 + m_2') = m_1 + m_1' = \alpha(m_1,m_2) + \alpha(m_1',m_2')$$

$$\alpha(r(m_1,m_2)) = \alpha(rm_1,rm_2) = rm_1 = r\alpha(m_1,m_2)$$

故α是模同态。

$$\alpha((m_1,m_2) \vee (m_1',m_2')) = \alpha(m_1 \vee m_1',m_2 \vee m_2') = m_1 \vee m_1' = \alpha(m_1,m_2) \vee \alpha(m_1',m_2')$$

$$\alpha((m_1,m_2) \wedge (m_1',m_2')) = \alpha(m_1 \wedge m_1',m_2 \wedge m_2') = m_1 \wedge m_1' = \alpha(m_1,m_2) \wedge \alpha(m_1',m_2')$$

故α是格同态。所以α是*Riesz*模$(N,+,\leqslant)$到*Riesz*模$(M_1,+,\leqslant)$的*Riesz*模同态。同理可证β是*Riesz*模$(N,+,M_1,+,\leqslant)$到*Riesz*模$(M_2,+,\leqslant)$的*Riesz*模同态。

定理2 在*Riesz*模范畴中,设$(M_1,+,\leqslant)$,$(M_2,+,\leqslant)$,$(M_3,+,\leqslant)$是*Riesz*模,$\varphi \in Hom((M_1,+,\leqslant),(M_3,+,\leqslant))$, $\psi \in Hom((M_2,+,\leqslant),(M_3,+,\leqslant))$,则$\{\varphi,\psi\}$的拉回是$\{(N,+,\leqslant),\alpha,\beta\}$(图3),其中$(M_1 \times M_2,+,\leqslant)$的子*Riesz*模$(N,+,\leqslant)=\{(m_1,m_2) \mid \varphi(m_1)=\psi(m_2)\}$, $\alpha \in Hom((N,+,\leqslant),(M_1,+,\leqslant))$, $\alpha(m_1,m_2) = m_1$, $\beta \in Hom((N,+,\leqslant),(M_2,+,\leqslant))$,$\beta(m_1,m_2) = m_2$.

$$\begin{tikzcd}
(\hat{N},+,\leq) \arrow[dr, dashed, "\xi"'] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& (N,+,\leq) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & (M_1,+,\leq) \arrow[d, "\varphi"] \\
& (M_2,+,\leq) \arrow[r, "\psi"] & (M_3,+,\leq)
\end{tikzcd}$$

图3 ***Riesz*模范畴中的拉回图**

证明 由于对任意的$(m_1,m_2) \in (N,+,\leqslant)$有

$$\varphi\alpha(m_1,m_2) = \varphi(m_1) = \psi(m_2) = \psi\beta(m_1,m_2)$$

所以$\varphi\alpha = \psi\beta$. 设$(\hat{N},+,\leqslant)$到$(M_1,+,\leqslant)$的*Riesz*模同态$\gamma$,$(\hat{N},+,\leqslant)$到$(M_2,+,\leqslant)$的*Riesz*模同态$\delta$满足$\varphi\gamma = \psi\delta$. 令函数$\xi:(\hat{N},+,\leqslant) \to (N,+,\leqslant)$满足对任意的$x \in (\hat{N},+,\leqslant)$,$\xi(x) = (\delta(x),\gamma(x))$,显然有

$$\alpha \circ \xi(x) = \alpha(\delta(x),\gamma(x)) = \gamma(x),\beta \circ \xi(x) = \beta(\delta(x),\gamma(x)) = \delta(x)$$

对任意的$x, y \in (\hat{N},+,\leqslant)$,$r \in (R,+,\leqslant)$有

$$\xi(x + y) = (\delta(x + y),\gamma(x + y)) = (\delta(x) + \delta(y),\gamma(x) + \gamma(y)) = (\delta(x),\gamma(x)) + (\delta(y),\gamma(y)) = \xi(x) + \xi(y)$$

$$\xi(rx) = (\delta(rx),\gamma(rx)) = (r\delta(x),r\gamma(x)) = r(\delta(x),\gamma(x)) = r\xi(x)$$

所以$\xi(x)$是模同态。又由于

$$\begin{aligned}\xi(x \vee y) &= (\gamma(x \vee y),\delta(x \vee y)) = (\gamma(x) \vee \gamma(y),\delta(x) \vee \delta(y)) \\ &= (\delta(x),\gamma(x)) \vee (\delta(y),\gamma(y)) = \xi(x) \vee \xi(y)\end{aligned}$$

$$\xi(x\wedge y)=(\delta(x\wedge y),\gamma(x\wedge y))=(\delta(x)\wedge\delta(y),\gamma(x)\wedge\gamma(y))$$
$$=(\delta(x),\gamma(x))\wedge(\delta(y),\gamma(y))=\xi(x)\wedge\xi(y)$$

所以$\xi(x)$是格同态。因此$\xi(x)$是*Riesz*模同态。

下面证明唯一性。假设存在$\xi':(\hat{N},+,\leqslant)\to(N,+,\leqslant)$，使得$\delta=\beta\xi'$，$\gamma=\alpha\xi'$. 对任意的$x\in(\hat{N},+,\leqslant)$有

$$\beta\circ\xi'(x)=\delta(x)=\beta\circ\xi(x),\alpha\circ\xi'(x)=\gamma(x)=\alpha\circ\xi(x)$$

又因为α、β是*Riesz*模同态，所以$\xi'=\xi$. 因此$\{(N,+,\leqslant),\alpha,\beta\}$是$\{\varphi,\psi\}$的拉回。

定理3 设$(M_1,+,\leqslant)$，$(M_2,+,\leqslant)$都是*Riesz*模，$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)=\{m_1+m_2|m_1\in(M_1,+\leqslant),m_2\in(M_2,+\leqslant)\}$. 规定

$$\forall m_1+m_2,m_1'+m_2'\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant),\forall r\in(R,+,\leqslant)$$
$$(m_1+m_2)+(m_1'+m_2')=(m_1+m_1')+(m_2+m_2')$$
$$r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2$$
$$(m_1+m_2)\vee(m_1'+m_2')=(m_1\vee m_1')+(m_2\vee m_2')$$
$$(m_1+m_2)\wedge(m_1'+m_2')=(m_1\wedge m_1')+(m_2\wedge m_2')$$

则$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模。

证明 由文献[11]知，$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$是一个左$R$-模。

对任意的$m_1+m_2,m_1'+m_2'\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$，有

$$z(m_1+m_2)\vee(m_1'+m_2')=(m_1\vee m_1')+(m_2\vee m_2')\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$$
$$(m_1+m_2)\wedge(m_1'+m_2')=(m_1\wedge m_1')+(m_2\wedge m_2')\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$$

故$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$是一个格。

对任意的$m_1+m_2,m_1'+m_2',p_1+p_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\leqslant)$，若$m_1+m_2\leqslant m_1'+m_2'$，则$(m_1+m_2)+(p_1+p_2)=(m_1+p_1,m_2+p_2)\leqslant(m_1'+p_1,m_2'+p_2)=(m_1'+m_2')+(p_1+p_2)$. 若$m_1+m_2\geqslant 0+0,r\geqslant 0$，则$r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2\geqslant 0+0=0$，故满足相容关系，因此$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模。

定义15 设$(M_1,+,\leqslant)$，$(M_2,+,\leqslant)$都是*Riesz*模，则$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$也是*Riesz*模，称为$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的直和。

注4 在*Riesz*模范畴中$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$是*Riesz*模$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的直和就是*Riesz*模$(M_1,+,\leqslant)$与$(M_2,+,\leqslant)$的余积。

定义16 设θ是*Riesz*模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的一个等价关系，对任意$m_1+m_2,n_1+n_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$，$m_1+m_2$与$n_1+n_2$具有关系$\theta$，记作$m_1+m_2\equiv n_1+n_2(\mathrm{mod}\theta)$. 如果对任意的$m_1+m_2,n_1+n_2,p_1+p_2,q_1+q_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$，$r\in(R,+,\leqslant)$，当$m_1+m_2\equiv(p_1+p_2)(\mathrm{mod}\theta)$，$n_1+n_2\equiv(q_1+q_2)(\mathrm{mod}\theta)$时有

$$(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\equiv((p_1+p_2)+(q_1+q_2))(\mathrm{mod}\theta)$$
$$r(m_1+m_2)\equiv r(p_1+p_2)(\mathrm{mod}\theta)$$
$$(m_1+m_2)\vee(n_1+n_2)\equiv((p_1+p_2)\vee(q_1+q_2))(\mathrm{mod}\theta)$$
$$(m_1+m_2)\wedge(n_1+n_2)\equiv((p_1+p_2)\wedge(q_1+q_2))(\mathrm{mod}\theta)$$

则称θ是*Riesz*模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的同余关系，称$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)=\{\theta(m_1+m_2)|m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)\}$为$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$关于同余关系$\theta$的商。

若定义映射$\alpha:(M_1,+,\leqslant)\to((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$，$\beta:(M_2,+,\leqslant)\to((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$，满足$\alpha(m_1)=\theta(m_1+0)$，$\beta(m_2)=\theta(0+m_2)$，则称映射$\alpha$、$\beta$为自然映射。

引理3 *Riesz*模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上任意多个同余关系的交仍为同余关系。

证明 设$\theta_i(i\in I)$是*Riesz*模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的同余关系，由于$\theta_i$为等价关系，先证$\bigcap\theta_i$是等价关系。

①自反性：$\forall m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$且$\theta_i(i\in I)$是*Riesz*模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的同余关系，有$(m_1+m_2,m_1+m_2)\in\theta_i$，所以$(m_1+m_2,m_1+m_2)\in\bigcap\theta_i$.

②对称性：$\forall m_1+m_2,n_1+n_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$，由于$(m_1+m_2,n_1+n_2)\in\theta_i$，$m_1+m_2\neq n_1+n_2$且$\theta_i(i\in I)$

是Riesz模$(M_1 \oplus M_2,+,\leqslant)$上的同余关系,有$(n_1+n_2,m_1+m_2)\in\theta_i$所以

$$(m_1+m_2,n_1+n_2)\in\bigcap\theta_i,\ (n_1+n_2,m_1+m_2)\in\bigcap\theta_i$$

③传递性:$\forall m_1+m_2,n_1+n_2,p_1+p_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$,由于$(m_1+m_2,n_1+n_2)\in\theta_i$,$(n_1+n_2,p_1+p_2)\in\theta_i$且$\theta_i(i\in I)$是Riesz模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的同余关系,有$(m_1+m_2,p_1+p_2)\in\theta_i$,所以$(m_1+m_2,n_1+n_2)\in\bigcap\theta_i$,$(n_1+n_2,p_1+p_2)\in\bigcap\theta_i$有$(m_1+m_2,p_1+p_2)\in\bigcap\theta_i$. 因此$\bigcap\theta_i$是Riesz模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的等价关系。

下证$\bigcap\theta_i$是同余关系:$\forall m_1+m_2,n_1+n_2,p_1+p_2,q_1+q_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$,$r\in R$,且$(m_1+m_2,n_1+n_2)\in\bigcap\theta_i$,$(p_1+p_2,q_1+q_2)\in\bigcap\theta_i$,则对于任意的$\theta_i(i\in I)$有,$(m_1+m_2,n_1+n_2)\in\theta_i$,$(p_1+p_2,q_1+q_2)\in\theta_i$,所以有$((m_1+m_2)+(p_1+p_2),(n_1+n_2)+(q_1+q_2))\in\theta_i$, $(r(m_1+m_2),r(n_1+n_2))\in\theta_i$, $((m_1+m_2)\vee(p_1+p_2),(n_1+n_2)\vee(q_1+q_2))\in\theta_i$, $((m_1+m_2)\wedge(p_1+p_2),(n_1+n_2)\wedge(q_1+q_2))\in\theta_i$. 因此有$((m_1+m_2)+(p_1+p_2),(n_1+n_2)+(q_1+q_2))\in\bigcap\theta_i$, $(r(m_1+m_2),r(n_1+n_2))\in\bigcap\theta_i$, $((m_1+m_2)\vee(p_1+p_2),(n_1+n_2)\vee(q_1+q_2))\in\bigcap\theta_i$, $((m_1+m_2)\wedge(p_1+p_2),(n_1+n_2)\wedge(q_1+q_2))\in\bigcap\theta_i$. 所以$\bigcap\theta_i$是Riesz模$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$上的同余关系。

定义17 设$(M,+,\leqslant)$是一个Riesz模,$R\subseteq M\times M$是M上的一个二元关系,令$< R >=\bigcap\{\theta\mid R\subseteq\theta,\theta$是$M$上的同余关系$\}$,根据引理3,$\langle R\rangle$是$M$上的同余关系,称为$R$生成的$M$上的同余关系。

引理4 设$(M_1,+,\leqslant)$,$(M_2,+,\leqslant)$是Riesz模,令$(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$关于同余关系$\theta$的商$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)=\{\theta(m_1+m_2)\mid m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)\}$,规定:$\forall m_1+m_2,m_1'+m_2'\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$,$r\in(R,+,\leqslant)$有

$$\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1+m_1')+(m_2+m_2'))$$
$$r\theta(m_1+m_2)=\theta(rm_1+rm_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1\vee m_1')+(m_2\vee m_2'))$$
$$\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1\wedge m_1')+(m_2\wedge m_2'))$$

则$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$是Riesz模。

证明 对$\forall m_1+m_2,m_1'+m_2',n_1+n_2,n_1'+n_2'\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$,满足$(m_1+m_2)\sim(n_1+n_2)$,$(m_1'+m_2')\sim(n_1'+n_2')$,即$\theta(m_1+m_2)=\theta(n_1+n_2)$,$\theta(m_1'+m_2')=\theta(n_1'+n_2')$. 由于

$$\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1+m_2)+(m_1'+m_2'))=\theta((n_1+n_2)+(n_1'+n_2'))=\theta(n_1+n_2)+\theta(n_1'+n_2')$$
$$r\theta(m_1+m_2)=\theta(rm_1+rm_2)=\theta(rn_1+rn_2)=r\theta(n_1+n_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1+m_2)\vee(m_1'+m_2'))=\theta((n_1+n_2)\vee(n_1'+n_2'))=\theta(n_1+n_2)\vee\theta(n_1'+n_2')$$
$$\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1+m_2)\wedge(m_1'+m_2'))=\theta((n_1+n_2)\wedge(n_1'+n_2'))=\theta(n_1+n_2)\wedge\theta(n_1'+n_2')$$

故在$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$中运算与代表元的选取无关。

对$\forall\theta(m_1+m_2),\theta(m_1'+m_2'),\theta(m_1''+m_2'')\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$,$a,b,r\in(R,+,\leqslant)$有

$$\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1+m_1')+(m_2+m_2'))\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$$

$$\begin{aligned}(\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2'))+\theta(m_1''+m_2'')&=(\theta((m_1+m_1')+(m_2+m_2')))+\theta(m_1''+m_2'')\\&=\theta(((m_1+m_1')+(m_1''))+((m_2+m_2')+(m_2'')))\\&=\theta(((m_1)+(m_1'+m_1''))+((m_2)+(m_2'+m_2'')))\\&=\theta(m_1+m_2)+(\theta((m_1'+m_1'')+(m_2'+m_2'')))\\&=\theta(m_1+m_2)+(\theta(m_1'+m_2')+\theta(m_1''+m_2''))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(m_1+m_2)+\theta(0+0)&=\theta((m_1+0)+(m_2+0))=\theta((0+m_1)+(0+m_2))\\&=\theta(0+0)+\theta(m_1+m_2)=\theta(m_1+m_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta((-m_1)+(-m_2))+\theta(m_1+m_2)&=\theta((-m_1+m_1)+(-m_2+m_2))\\&=\theta((m_1+(-m_1))+(m_2+(-m_2)))=\theta((m_1+(-m_1))+(m_2+(-m_2)))\\&=\theta(m_1+m_2)+\theta((-m_1)+(-m_2))=\theta(0+0)\end{aligned}$$

$$\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1+m_1')+(m_2+m_2'))=\theta((m_1'+m_1)+(m_2'+m_2))=\theta(m_1'+m_2')+\theta(m_1+m_2)$$

故$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$是一个Abel群。

对$\forall\theta(m_1+m_2),\theta(m_1'+m_2'),\theta(m_1''+m_2'')\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$,$a,b,r,1\in(R,+,\leqslant)$有

$$a(\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2'))=a(\theta(m_1+m_1')+(m_2+m_2'))=\theta((a(m_1+m_1'))+(a(m_2+m_2')))$$
$$=\theta((am_1+am_1')+(am_2+am_2'))=\theta(am_1+am_2)+\theta(am_1'+am_2')$$
$$=a\theta(m_1+m_2)+a\theta(m_1'+m_2')$$
$$(a+b)(\theta(m_1+m_2))=\theta(((a+b)(m_1))+((a+b)(m_2)))=\theta((am_1+bm_1)+(am_2+bm_2))$$
$$=\theta(am_1+am_2)+\theta(bm_1+bm_2)=a(\theta(m_1+m_2))+b(\theta(m_1+m_2))$$
$$(ab)(\theta(m_1+m_2))=\theta((ab)(m_1))+((ab)(m_2)))=\theta((a(bm_1))+(a(bm_2)))$$
$$=a(\theta(bm_1+bm_2))=a(b\theta(m_1+m_2))$$
$$1(\theta(m_1+m_2))=\theta(1m_1+1m_2))=\theta(m_1+m_2))$$

故$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$是一个左$R$-模。又由于

$$\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1\vee m_1')+(m_2\vee m_2'))=\theta((m_1'\vee m_1)+(m_2'\vee m_2))=\theta(m_1'+m_2')\vee\theta(m_1+m_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\vee(\theta(m_1'+m_2')\vee\theta(m_1''+m_2''))=\theta(m_1+m_2)\vee(\theta(m_1'\vee m_1'')+\theta(m_2'\vee m_2''))$$
$$=\theta(((m_1)\vee(m_1'\vee m_1''))+((m_2)\vee(m_2'\vee m_2'')))$$
$$=\theta(((m_1\vee m_1')\vee m_1'')+((m_2\vee m_2')\vee m_2''))$$
$$=(\theta((m_1\vee m_1')+(m_2\vee m_2')))\vee\theta(m_1''+m_2'')$$
$$=(\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1'+m_2'))\vee\theta(m_1''+m_2'')$$
$$\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1+m_2)=\theta((m_1\vee m_1)+(m_2+m_2))=\theta(m_1+m_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\vee(\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1'+m_2'))=\theta(m_1+m_2)\vee(\theta(m_1\wedge m_1')+(m_2\wedge m_2'))$$
$$=\theta(((m_1)\vee(m_1\wedge m_1'))+((m_2)\vee(m_2\wedge m_2')))$$
$$=\theta(m_1+m_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1'+m_2')=\theta((m_1\wedge m_1')+(m_2\wedge m_2'))=\theta((m_1'\wedge m_1)+(m_2'\wedge m_2))$$
$$=\theta(m_1'+m_2')\wedge\theta(m_1+m_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\wedge(\theta(m_1'+m_2')\wedge\theta(m_1''+m_2''))=\theta(m_1+m_2)\wedge(\theta(m_1'\wedge m_1'')+\theta(m_2'\wedge m_2''))$$
$$=\theta(((m_1)\wedge(m_1'\wedge m_1''))+((m_2)\wedge(m_2'\wedge m_2'')))$$
$$=\theta(((m_1\wedge m_1')\wedge m_1'')+((m_2\wedge m_2')\wedge m_2''))$$
$$=(\theta((m_1\wedge m_1')+(m_2\wedge m_2')))\wedge\theta(m_1''+m_2'')$$
$$=(\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1'+m_2'))\wedge\theta(m_1''+m_2'')$$
$$\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1+m_2)=\theta((m_1\wedge m_1)+(m_2\wedge m_2))=\theta(m_1+m_2)$$
$$\theta(m_1+m_2)\wedge(\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1'+m_2'))=\theta(m_1+m_2)\wedge(\theta(m_1\vee m_1')+(m_2\vee m_2'))$$
$$=\theta(((m_1)\wedge(m_1\vee m_1'))+((m_2)\wedge(m_2\vee m_2')))$$
$$=\theta(m_1+m_2)$$

故$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$是一个格。

对任意的$m_1+m_2,m_1'+m_2',p_1+p_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant),r\in(R,+,\leqslant)$,若$m_1+m_2\leqslant m_1'+m_2'$,又因为$\theta(m_1+m_2)+\theta(p_1+p_2),\theta(m_1'+m_2')+\theta(p_1+p_2)\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$,所以$\theta(m_1+m_2)+\theta(p_1+p_2)\leqslant\theta(m_1'+m_2')+\theta(p_1+p_2)$. 若 $m_1+m_2\geqslant 0+0$, $r\geqslant 0$, $m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$, $r\in(R,+,\leqslant)$, 又因为 $r\theta(m_1+m_2)\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$,所以$r\theta(m_1+m_2)\geqslant 0$,故满足同余关系,所以$((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$是一个*Riesz*模。

引理5 设$(M_1,+,\leqslant),(M_2,+,\leqslant)$是*Riesz*模,令*Riesz*模$(N,+,\leqslant)=((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)=\{\theta(m_1+m_2)|m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)\}$,$\alpha$是$(M_1,+,\leqslant)$到$(N,+,\leqslant)$的映射,$\beta$是$(M_2,+,\leqslant)$到$(N,+,\leqslant)$的映射,规定:$\forall m_1\in(M_1,+,\leqslant),\alpha(m_1)=\theta(m_1+0),\forall m_2\in(M_2,+,\leqslant),\beta(m_2)=\theta(0+m_2)$,则$\alpha$、$\beta$是*Riesz*模同态。

证明 由于对$\forall m_1,m_1'\in(M_1,+,\leqslant),r\in(R,+,\leqslant)$有

$$\alpha(m_1+m_1')=\theta((m_1+m_1')+0)=\theta((m_1+0)+(m_1'+0))=\theta(m_1+0)+\theta(m_1'+0)=\alpha(m_1)+\alpha(m_1')$$
$$\alpha(rm_1)=\theta(rm_1+r0)=r\theta(m_1+0)=r\alpha(m_1)$$
$$\alpha(m_1\vee m_1')=\theta((m_1\vee m_1')+0)=\theta((m_1+0)\vee(m_1'+0))=\theta(m_1+0)\vee\theta(m_1'+0)=\alpha(m_1)\vee\alpha(m_1')$$
$$\alpha(m_1\wedge m_1')=\theta((m_1\wedge m_1')+0)=\theta((m_1+0)\wedge(m_1'+0))=\theta(m_1+0)\wedge\theta(m_1'+0)=\alpha(m_1)\wedge\alpha(m_1')$$

故α是*Riesz*模同态。

又由于$\forall m_2, m_2' \in (M_2,+,\leqslant), r \in (R,+,\leqslant)$有

$$\beta(m_2+m_2')=\theta(0+(m_2+m_2'))=\theta((0+m_2)+(0+m_2'))=\theta(0+m_2)+\theta(0+m_2')=\beta(m_2)+\beta(m_2')$$

$$\beta(rm_2)=\theta(0+rm_2)=\theta(r0+rm_2)=r\theta(0+m_2)=r\beta(m_2)$$

$$\beta(m_2\vee m_2')=\theta(0+(m_2\vee m_2'))=\theta((0+m_2)\vee(0+m_2'))=\theta(0+m_2)\vee\theta(0+m_2')=\beta(m_2)\vee\beta(m_2')$$

$$\beta(m_2\wedge m_2')=\theta(0+(m_2\wedge m_2'))=\theta((0+m_2)\wedge(0+m_2'))=\theta(0+m_2)\wedge\theta(0+m_2')=\beta(m_2)\wedge\beta(m_2')$$

故β也是*Riesz*模同态。

定理4 在*Riesz*模范畴中,设$(M_1,+,\leqslant),(M_2,+,\leqslant),(M_3,+,\leqslant)$是*Riesz*模,$\varphi\in Hom((M_3,+,\leqslant),(M_1,+,\leqslant))$, $\psi\in Hom((M_3,+,\leqslant),(M_2,+,\leqslant))$,则$\{\varphi,\psi\}$的推出$\{(N,+,\leqslant),\alpha,\beta\}$(图4),其中$(N,+,\leqslant)=((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)=\{\theta(m_1+m_2)|m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)\}$, θ 是 由 $\{(\varphi(m),\psi(m))\,|\,\forall m\in(M_3,+,\leqslant)\}$ 生 成 的 同 余 关 系 , $\alpha\in Hom((M_1,+,\leqslant),(N,+,\leqslant))$, $\forall m_1\in(M_1,+,\leqslant)$, $\alpha(m_1)=\theta(m_1+0)$, $\beta\in Hom((M_2,+,\leqslant),(N,+,\leqslant))$, $\forall m_2\in(M_2,+,\leqslant),\beta(m_2)=\theta(0+m_2)$.

$$\begin{tikzcd}
(M_3,+,\leq) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & (M_1,+,\leq) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
(M_2,+,\leq) \arrow[r, "\beta"] \arrow[ddrr, bend right, "\delta"'] & (N,+,\leq) \arrow[dr, dashed, "\xi"] & \\
 & & (\hat{N},+,\leq)
\end{tikzcd}$$

图4 *Riesz*模范畴中的推出图

证明 对任意的$m\in(M_3,+,\leqslant)$有$\alpha\varphi(m)=\theta(\varphi(m)+0),\beta\psi(m)=\theta(0+\psi(m))$,又因为$((\varphi(m),\psi(m))\in\theta$,所以$\theta(\varphi(m)+0)=\theta(0+\psi(m))$,即由$m$的任意性可知:$\alpha\varphi=\beta\psi$.

设$(\hat{N},+,\leqslant)$是一个*Riesz*模,γ是$(M_1,+,\leqslant)$到$(\hat{N},+,\leqslant)$的*Riesz*模同态,δ是$(M_2,+,\leqslant)$到$(\hat{N},+,\leqslant)$的*Riesz*模同态,满足$\gamma\varphi=\delta\psi$. 定义:ξ是$(N,+,\leqslant)$到$(\hat{N},+,\leqslant)$的映射,规定:对$\forall m_1\in M_1$, $m_2\in M_2$, $\theta(m_1+m_2)\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$,$\xi(\theta(m_1+m_2))=\gamma(m_1)+\delta(m_2)$.

对$\forall m_1\in(M_1,+,\leqslant),m_2\in(M_2,+,\leqslant),m_1+m_2,m_1'+m_2'\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$令$\theta(m_1+m_2)=\theta(m_1'+m_2')$,由于

$$\xi(\theta(m_1+m_2))=\gamma(m_1)+\delta(m_2)=\gamma(m_1')+\delta(m_2')=\xi(\theta(m_1'+m_2'))$$

故ξ与代表元的选取无关。

因为对$\forall m_1\in(M_1,+,\leqslant),m_2\in(M_2,+,\leqslant),\theta(m_1+m_2),\theta(m_1'+m_2')\in((M_1\oplus M_2)/\theta,+,\leqslant)$有

$$\begin{aligned}
\xi(\theta(m_1+m_2)+\theta(m_1'+m_2'))&=\xi(\theta((m_1+m_1')+(m_2+m_2')))=\gamma(m_1+m_1')+\delta(m_2+m_2')\\
&=(\gamma(m_1)+\gamma(m_1'))+(\delta(m_2)+\delta(m_2'))\\
&=(\gamma(m_1)+\delta(m_2))+(\gamma(m_1')+\delta(m_2'))\\
&=\xi(\theta(m_1+m_2))+\xi(\theta(m_1'+m_2'))
\end{aligned}$$

$$\xi(r\theta(m_1+m_2))=\gamma(rm_1)+\delta(rm_2)=r\gamma(m_1)+r\delta(m_2)=r\xi(\theta(m_1+m_2))$$

$$\begin{aligned}
\xi(\theta(m_1+m_2)\vee\theta(m_1'+m_2'))&=\xi(\theta((m_1+m_1')\vee(m_2+m_2')))=\gamma(m_1+m_1')\vee\delta(m_2+m_2')\\
&=(\gamma(m_1)+\gamma(m_1'))\vee(\delta(m_2)+\delta(m_2'))\\
&=(\gamma(m_1)+\delta(m_2))\vee(\gamma(m_1')+\delta(m_2'))\\
&=\xi(\theta(m_1+m_2))\vee\xi(\theta(m_1'+m_2'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi(\theta(m_1+m_2)\wedge\theta(m_1'+m_2'))&=\xi(\theta((m_1+m_1')\wedge(m_2+m_2')))\\
&=\gamma(m_1+m_1')\wedge\delta(m_2+m_2')\\
&=(\gamma(m_1)+\gamma(m_1'))\wedge(\delta(m_2)+\delta(m_2'))\\
&=(\gamma(m_1)+\delta(m_2))\wedge(\gamma(m_1')+\delta(m_2'))\\
&=\xi(\theta(m_1+m_2))\wedge\xi(\theta(m_1'+m_2'))
\end{aligned}$$

所以ξ是*Riesz*模同态。

又因为ξ是$(N,+,\leqslant)$到$(\hat{N},+,\leqslant)$的*Riesz*模同态，且对$\forall m_1\in(M_1,+,\leqslant),m_2\in(M_2,+,\leqslant)$，$m_1+m_2\in(M_1\oplus M_2,+,\leqslant)$，有$\xi(\theta(m_1+m_2))=\gamma(m_1)+\delta(m_2)$，显然有：$\xi\alpha(m_1)=\xi(\theta(m_1+0))=\gamma(m_1)+\delta(0)=\gamma(m_1)$,$\xi\beta(m_2)=\xi(\theta(0+m_2))=\delta(m_2)+\gamma(0)=\delta(m_2)$,由$m_1,m_2$的任意性可知:$\xi\alpha=\gamma,\xi\beta=\delta$.

下面验证ξ的唯一性。

令ξ'也是满足条件的*Riesz*模同态,有$\xi'\alpha=\gamma=\xi\alpha,\xi'\beta=\delta=\xi\beta$,又因为$\alpha$和$\beta$是*Riesz*模同态,所以$\xi=\xi'$得证。因此$\{(N,+,\leqslant),\alpha,\beta\}$是$\{\varphi,\psi\}$的推出。

参考文献:

[1] RIESZ F. Sur Quelques Notions Fondamentales Dans La Theorie Generale Des Operations Lineaires[J]. Princeton: Annals of Mathematics,1940,41(01):174-206.

[2] 戴天佑. 序理论的基础[M]. 纽约:纽约约克学院,2008.

[3] BIRKHOFF G. Lattice-ordered Groups[J]. Providence:Mathematics Department,Princeton University,1942,43(02):298-331.

[4] JOHNSON D G. A Structure Theory for A Class of Lattice-ordered Rings[J]. Stockholm:ActaMath,1960,104(03):163-215.

[5] 崔晓宇,周璞铉,汤建钢,等. 左*R*-模上*Riesz*空间的相关性质研究[J]. 伊犁师范大学学报(自然科学版),2022,16(04):1-7.

[6] 谭志航,程国胜. 格序环的L同态[J]. 淮北煤师院学报,1993,14(02):13-14.

[7] 刘晓芳,汤建钢. *Riesz*模范畴中直积与直和的性质研究[J]. 伊犁师范大学学报(自然科学版),2023,17(03):1-12.

[8] 周伟. 格序模f-张量积函子的正合性与平坦格序模[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),1992,15(03):52-57.

[9] 贺伟. 范畴论[M]. 北京:科学出版社,2006.

[10] 崔晓宇. 左R-模上*Riesz*空间范畴中投射对象的性质研究[D]. 伊宁:伊犁师范大学,2024.

[11] 李桃生. 范畴与同调代数基础[M].北京:华东师范大学出版社,1986.

[12] 陈志杰. 代数基础:模、范畴、同调代数与层[M]. 上海:华东师范大学出版社,2001.

[13] 孙锐娟. 左R-模上*Riesz*空间的同态和同构性质研究[J]. 伊犁师范大学学报(自然科学版),2023,17(02):1-8.

[14] 魏武.L-半格范畴[D].长沙:湖南大学,2010.

[15] 曾敏. 半模范畴中的拉回图性质及其推广[D]. 南昌:江西师范大学,2012.

Study on Properties of Pull-back and Push-out in the Category of *Riesz* Modules

YU Xiao-wen[1], TANG Jian-gang[1,2], LI Dan-yang[1]

(*1. College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining, Xinjiang, 835000, China;*

2. Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining, Xinjiang, 835000, China)

Abstract: Pull-back and push-out, also known as fibre product and fibre coproduct, are two important dual concepts in category theory, and are abstraction of many concepts in mathematics, with rich connotations. In this paper, existence and uniqueness of pull-back and push-out are studied in the category of *Riesz* modules.Firstly the notion of pull-back is introduced by constructing an object and a pair of morphisms that satisfy the notion of pull-back in the category of *Riesz* modules, and prove the existence and uniqueness of pull-back. Dually, the notion of congruence relation is introduced in the category of *Riesz* modules, based on which the notion of quotient of *Riesz* modules is defined by applying the congruence relation as a quotient. Then, the notion of push-out is defined by constructing an object and a pair of morphisms that satisfy the notion of push-out in the category of *Riesz* modules, and prove the existence and uniqueness of push-out.

Keywords: *Riesz* modules; Category; Pull-back; Push-out